La Logique Combinatoire

1 - La variable binaire

L'électrotechnique, l'électronique et la mécanique étudient et utilisent la variation de grandeurs physiques telles que la pression, le niveau, la tension...
Certaines applications qui ne prennent en compte que **deux valeurs** relatives à ces grandeurs physiques, font que ces dernières soient considérées comme des **variables binaires**.

2 - Les états logiques

Les deux valeurs que peut prendre une variable binaire définissent, en particulier, ses deux états logiques, qui sont exprimés au moyen de symboles pour lesquels l'usage est d'utiliser les chiffres **0** et **1**.

3 - Outils de description d'une fonction logique

La fonction logique réalisée par un opérateur binaire peut toujours être définie par une expression littérale.

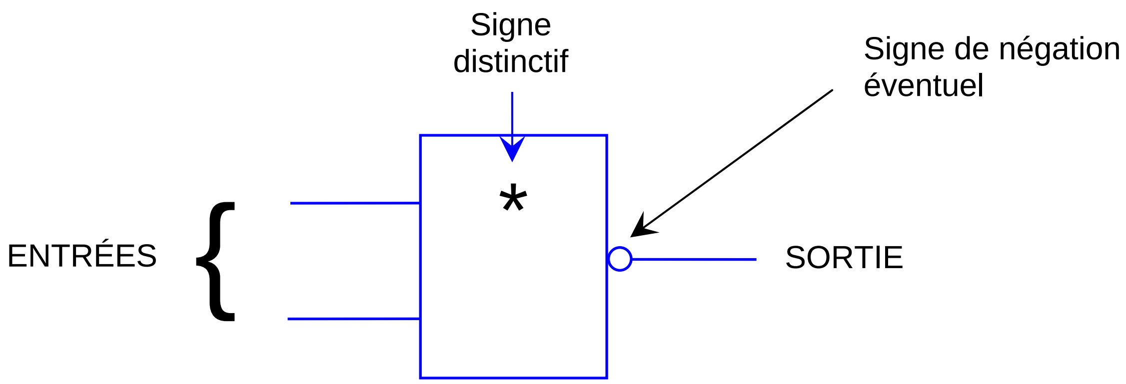
Exemple: la lampe est à l'état 1 (allumée) si et seulement si l'interrupteur est à l'état 1 (fermé).

À cette expression littérale peuvent être associés d'autres modes de représentation :

- le symbole logique,
- le schéma à contacts,
- la table de vérité,
- le chronogramme,
- et l'équation logique.

A) Le symbole logique :

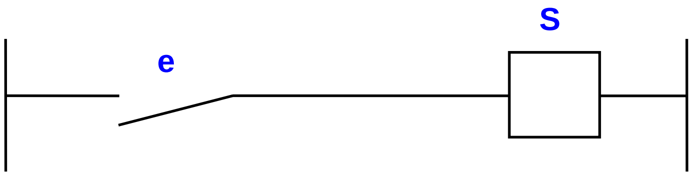
C'est la représentation schématique normalisée de l'opérateur.



Selon la norme (NF C 03.212), le symbole représentatif d'un opérateur logique est constitué d'un rectangle, dans le tiers supérieur duquel est placé l'un des signes distinctifs suivants : **1**, **&**, **≥1**, **=1**.

L'entrée ou les entrées de l'opérateur se situent généralement à gauche et la sortie à droite. Le signe O qui figure éventuellement sur la sortie indique sa négation logique.

B) Le schéma à contacts



Le contact concrétise, par ses deux positions, les deux états d'une variable binaire d'entrée.
Le contact e est la variable d'entrée.
S est la variable de sortie.

C) La table de vérité

Pour les opérateurs binaires de la logique combinatoire dans lesquels à une combinaison d'états des variables d'entrée ne correspond qu'un état de la sortie, la table de vérité précise toutes les relations possibles entre ces états.

Table de vérité à deux variables d'entrée :

a	b	S
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

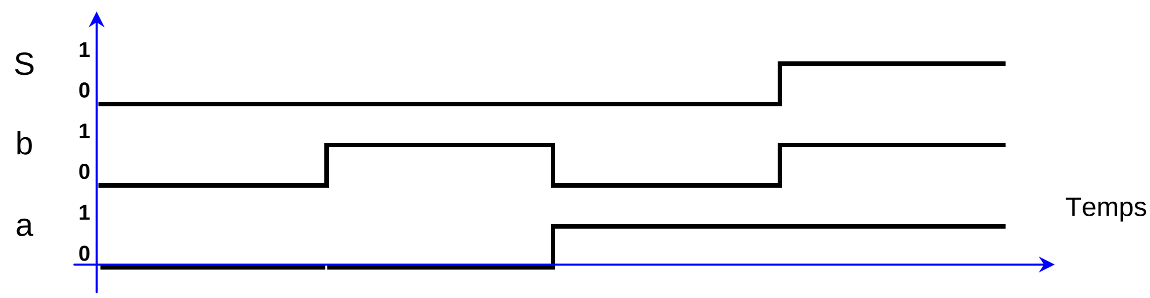
Pour calculer le nombre de combinaisons à inscrire dans la table de vérité, on peut utiliser la formule suivante :

Nb. de combinaison = 2^n

(2 représente le nombre d'états logiques possibles et n le nombre de variables d'entrées).

D) Le chronogramme

Le chronogramme est une représentation graphique qui permet de visualiser, en fonction du temps, toutes les combinaisons d'états logiques possibles des entrées avec l'état correspondant de la sortie.



E) L'équation logique

> L'équation logique traduit, selon les règles de l'algèbre de Boole (*), la relation qui lie entre elles variables de sortie et variables d'entrée.

(*) *George BOOLE (1815-1864) mathématicien anglais qui a codifié les opérations et les fonctions logiques, s'est révélée un outil indispensable en informatique.*

Le signe **=** traduit une égalité d'état entre les deux membres de l'équation.
Dans chaque membre les variables peuvent être associées pour des opérations :

- de produit logique, **ET**, par les symboles ×, **•**, , qui se lisent **ET**,
- de somme logique, **OU**, par le symbole **+** qui se lit **OU**,
- de négation logique, **NON**, par le symbole ¯ qui se lit **NON** ou **BARRE**.

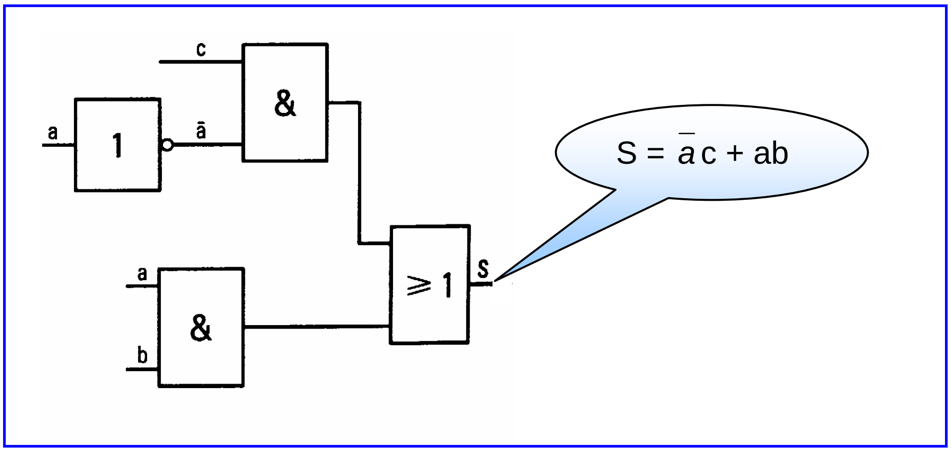
$S = a \times b = a \bullet b = ab$

Ces trois expressions identiques se lisent : S égale a ET b.

4 - LE LOGIGRAMME

Le traitement logique des informations peut nécessiter la mise en œuvre d'un nombre important d'opérateurs binaires qui doivent être interconnectés.

Exemple :



5 - La logique combinatoire

La logique est dite *combinatoire* si, pour un même état des entrées, nous avons toujours le même état des sorties, quel que soit l'ordre des informations d'entrées (donc pas d'ordre chronologique, pas de mémoire et pas de position dans le temps).

6 - L'algèbre de Boole

La mise en œuvre des propriétés de l'algèbre de Boole permet d'obtenir la plus simple expression équationnelle de tout problème de logique.

A) Propriétés et opérations élémentaires

Commutativité:

$S = a \bullet b = b \bullet a$

$S = a + b = b + a$

Associativité :

$S = a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c = a \bullet b \bullet c$

$S = a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c$

Distributivité :

$S = a \bullet (b + c) = (a \bullet b) + (a \bullet c)$

$S = a + (b \bullet c) = (a + b) \bullet (a + c)$

Complémentation :

$S = a \bullet \overline{a} = 0$

$S = a + \overline{a} = 1$

Idempotence :

$S = a \bullet a = a$

$S = a + a = a$

Élément neutre :

$S = a + 0 = a$

$S = a \bullet 1 = a$

Élément absorbant :

$S = a \bullet 0 = 0$

$S = a + 1 = 1$

Absorption :

$S = a + (b \bullet a) = a$

$S = a \bullet (b + a) = a$

Involution :

$S = \overline{\overline{a}} = a$

Inclusion :

$S = (a \bullet b) + (a \bullet \overline{b}) = a$

B) THÉORÈMES DE DE MORGAN

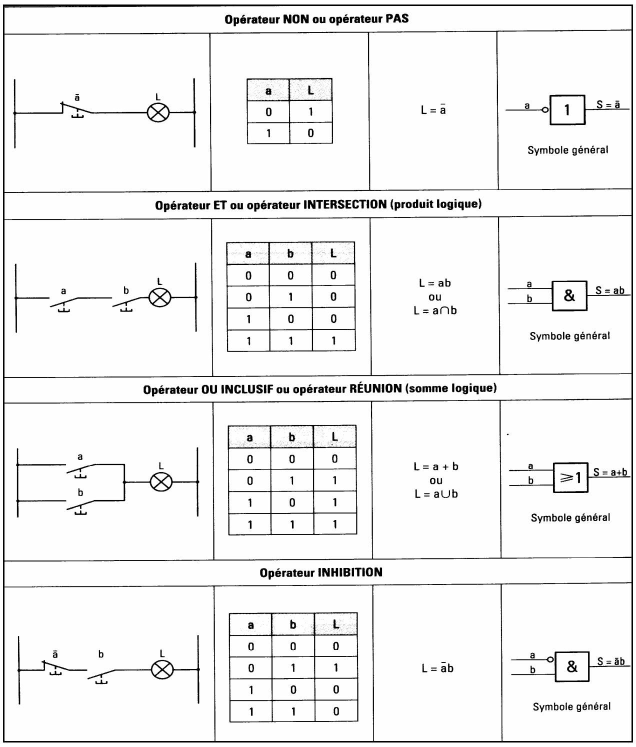
Le complément d'un produit logique est égal à la somme logique des facteurs complémentés de ce produit.

$$\boxed{\overline{ab} = \bar{a} + \bar{b}}$$

Le complément d'une somme logique est égal au produit logique des termes complémentés de cette somme.

$$\boxed{\overline{a+b} = \bar{a}\,\bar{b}}$$

7 - LES FONCTIONS LOGIQUES DE BASE



Opérateur NON ou opérateur PAS

a	L
0	1
1	0

$L = \bar{a}$

$S = \bar{a}$ — Symbole général

Opérateur ET ou opérateur INTERSECTION (produit logique)

a	b	L
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$L = ab$ ou $L = a \cap b$

$S = ab$ — Symbole général

Opérateur OU INCLUSIF ou opérateur RÉUNION (somme logique)

a	b	L
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$L = a + b$ ou $L = a \cup b$

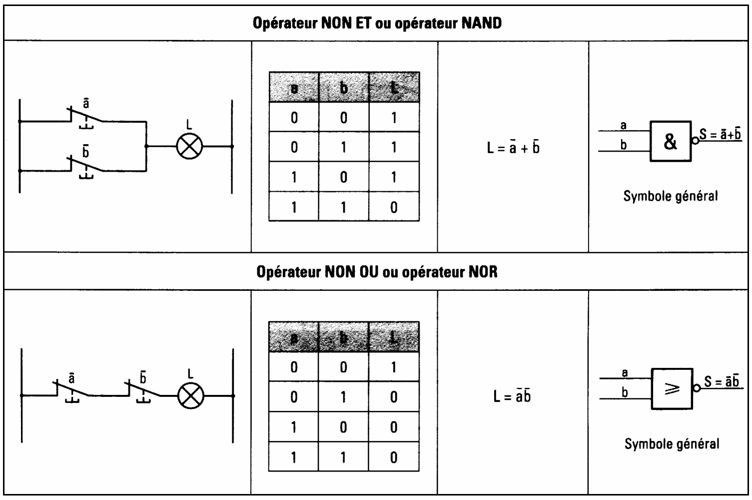
$S = a+b$ — Symbole général

Opérateur INHIBITION

a	b	L
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

$L = \bar{a}b$

$S = \bar{a}b$ — Symbole général



Opérateur NON ET ou opérateur NAND

a	b	L
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$L = \bar{a} + \bar{b}$

$S = \bar{a}+\bar{b}$ — Symbole général

Opérateur NON OU ou opérateur NOR

a	b	L
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

$L = \bar{a}\bar{b}$

$S = \bar{a}\bar{b}$ — Symbole général